El Materialismo Dialéctico y el Cálculo

El Juan

Las matemáticas, antes del cálculo diferencial e integral eran matemáticas que trabajaban con entes fijos en el espacio, en los cuales no existía el tiempo. Tales "modelos" matemáticos solamente podían describir unos cuantos sistemas, sistemas en los cuales podíamos suponer que variaban muy poco en el tiempo. Por lo tanto las matemáticas de ese tiempo necesariamente seguían las leyes de la lógica formal, ya que esta funciona casi siempre más o menos bien cuando suponemos que los cambios en el tiempo son pequeños. Reiteramos que las matemáticas antes del cálculo diferencial e integral sólo podían describir muy pocos sistemas debido a su inmutabilidad en el tiempo. El cálculo diferencial e integral nace como consecuencia de buscar describir sistemas eventos o sistemas que evolucionan en el tiempo, por tanto, esta nueva matemática "avanzada" tenía que romper con el viejo esquema de la lógica formal—el de las matemáticas"elementales"—, es decir, las matemáticas previas al cálculo. Estas nuevas matemáticas "avanzadas" necesariamente tenían que dar una nueva visión del mundo en el cual la lógica formal quedaría remplazada por una nueva filosofía, es decir una filosofía al acorde de los cambios del tiempo, una nueva lógica, la lógica del movimiento, es decir, el materialismo dialéctico.

En esta monografía no desarrollaremos "rigor matemático", porque es de carácter divulgatorio, tanto de las ideas del materialismo dialéctico,como también de las matemáticas y la física. No describiremos con detalle las leyes de la dialéctica, ya que creo que en el libro de Alan Woods y Ted Grant se hace una excelente descripción de estas leyes. Vale la pena aclarar lo siguiente: *En una primera lectura, puede ser omitida la lectura de las fórmulas que aparecen en esta monografía.*

LA DERIVADA

Si la ley de movimiento de una partícula puede ser expresada a través de la fórmula $x(t) = 5t^2$, esto quiere decir que en cada momento t, nos es posible ubicar a dicha partícula en el eje x, así, si quiero saber donde se encuentra la partícula $1s$ después de haber empezado el movimiento tengo que hacer la siguiente operación: $x\,(1) = 5(1)^2 = 5$, esto significa que 5 metros es lo que se ha desplazado el vehículo un segundo después de haber empezado a desplazarse. De este modo podemos hacer esto para cualquier valor de t.

Ahora, nos plantearemos resolver el siguiente problema: Encontrar la velocidad instantánea de un vehículo que se desplaza siguiendo la ley $x(t) = 5t^2$ donde $x(t)$ representa el desplazamiento del vehículo en un tiempo t

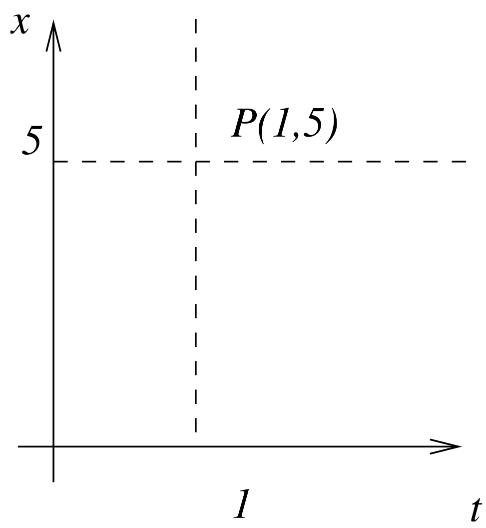

Figura 1:

Podemos hacer esto para cualquier intervalo de tiempo, de este modo podemos representar una posición en un tiempo dado como un punto en el plano de la siguiente manera: Tomemos dos rectas que se cortan en ángulo recto en el plano; el punto de intersección de estas rectas lo llamamos origen, a la recta horizontal la llamamos eje del tiempo t y a la recta vertical la llamamos eje de posición x. Dividamos ambas rectas en varios segmentos de la misma longitud. Ahora tomemos el caso anterior en el que para $t = 1s$, $x(t) = x(1) = 5$, este instante en el tiempo y el espacio queda representado por el punto formado por el punto formado por la intersección de las rectas horizontal que pasa a una altura 5 en el eje de las posiciones y la recta vertical que pasa por el $t = 1$. (ver figura 1). Si esto lo hacemos para todo tiempo, notaremos que obtendremos una curva en el plano que llamaremos gráfica de la función.

Vale la pena hacer hincapié aquí, en la construcción hecha hasta este momento.

1. Hemos representado el tiempo por una recta y cada segundo que transcurre, por un punto de tal recta.

2. El desplazamiento en línea recta del vehículo lo representamos como una recta que corta al eje del tiempo formando un ángulo recto y cada punto de este eje representa la distancia decorrida por el objeto.

3. Un punto del plano determina una posición del vehículo para cada tiempo determinado.

4. La gráfica de la función representa el recorrido del vehículo en el tiempo. Esto significa que una curva representa la evolución en el tiempo de una partícula.

5. También se debe notar lo siguiente: Estamos estudiando una partícula en movimiento, es decir, una partícula material determinada en un espacio y un tiempo dado. Espacio, tiempo, materia y movimiento, todos independientes entre si, pero siempre están unidos. No existe materia que no ocupe lugar o que se encuentre estática en el espacio y el tiempo.

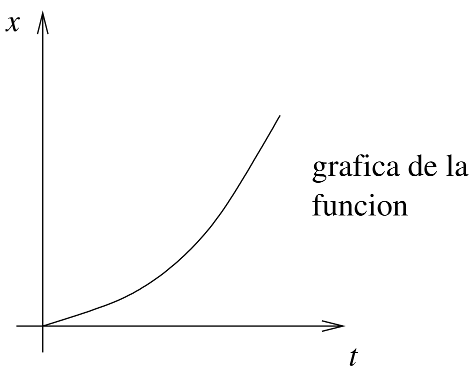

Figura 2:

Prosigamos, más abajo seguiremos sacando conclusiones de todo esto, pero para ello tenemos que seguir avanzando en la solución del problema.

Recordemos que el problema que queremos resolver, es encontrar la velocidad de una partícula en un tiempo dado, es decir, encontrar su velocidad instantánea. Pero, ¿ qué es la velocidad instantánea? ¿ cómo se determina?¿ geométrcamente (abstracto), qué es la velocidad instantánea?

La velocidad instantánea es la velocidad que lleva la partícula en un tiempo determinado. Para fijar ideas, consideremos una partícula que se mueve en línea recta siguiendo la ley dictada por la siguiente tabla.

x	t
2	1
4	2
6	3
8	4
10	5
12	6
14	7
16	8

Notemos que el grafico de esta tabla es una línea recta. La velocidad está dada por la expresión $v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ si tomamos por ejemplo los puntos P_2 $(x_2 = 10, t_2 = 5)$, P_1, $(x_1 = 4, t_1 = 2)$ en tal la velocidad es $v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10-4}{4-2} = \frac{6}{3} = 2$, este cociente es el mismo para cualesquiera puntos de la recta. A los movimientos cuya gráfica asociada es una línea recta que pasa por el origen, se les llaman movimientos rectilíneos uniformes (MRU). La velocidad tiene una interpretación geométrica:

Nombremos φ al ángulo formado por la recta y el eje t.

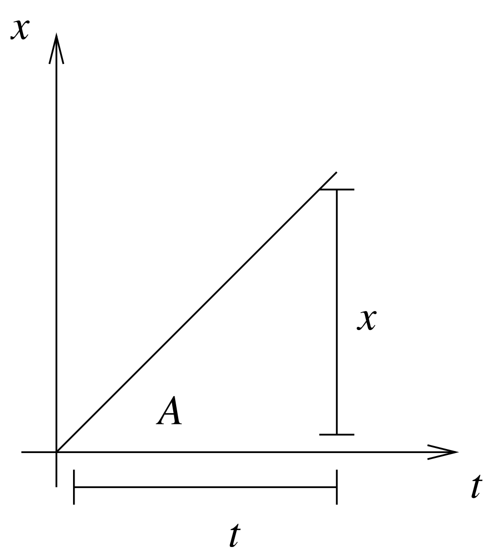

Figura 3:

Podemos considerar el eje t como el cateto adyacente de un triangulo rectángulo con una longitud Δt con un cateto opuesto de longitud igual a Δx (ver figura 3), esto significa que la velocidad de un cuerpo en movimiento rectilíneo uniforme es la tangente del ángulo de inclinación de la recta, porque la tangente del ángulo φ se define como $v = \tan\varphi = m = \frac{cat.op}{cat.ad} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$. A la tangente del ángulo de inclinación de la recta también se le llama pendiente y la denotamos con la letra m. Notemos que mientras más inclinada se encuentre una recta, mayor es el valor de la pendiente, ya que esta mide la inclinación de una recta.

Todo lo anterior es valido para un movimiento rectilíneo uniforme pero, ¿ cómo utilizo lo anterior para determinar la velocidad instantánea de $x(t) = 5t^2$? Observemosmos lo siguiente: La inclinación de la gráfica del movimiento de un vehículo determina que tan rápido se desplaza esta. Para medir la inclinación de la gráfica, tendremos que medir la inclinación de la recta tangente a ese punto. Entonces, podremos decir que la velocidad instántanea de un movimiento en un tiempo dado $t = t_0$, está dada por la pendiente del recta tangente, ya que esta mide que tan inclinada se encuentra una gráfica. (ver figura 4).

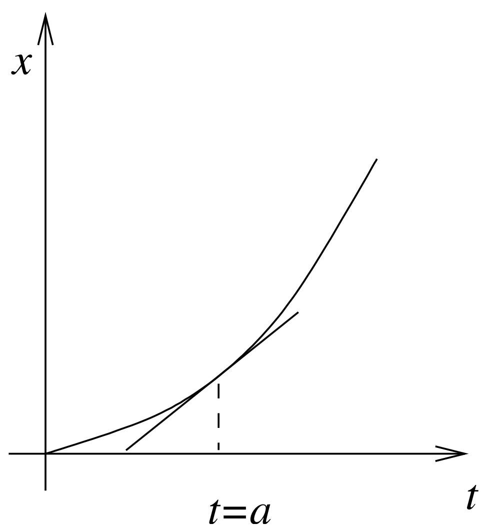

Figura 4:

Para determinar la pendiente de la recta tangente en $t = t_0$ emplearemos un método inventado por Pierre Fermat. Lo notable de este método es que él empieza a hacer uso del movimiento en las matemáticas.

Primero tomemos el punto de la gráfica $P_0\,(t_0, x(t_0))$, en el cual se desea encontrar la pendiente de la recta tangente, en nuestro caso P_0, y cualquier otro punto de la gráfica $P\,(t, x(t))$. A la recta que pasa por ambos puntos la llamamos recta secante.

Ahora hagamos que t se aproxime a t_0. A este proceso lo llamamos t tiende a t_0. (notación: $t \to t_0$). Pedir todo esto es equivalente a pedir que el punto P se mueva sobre la gráfica, de tal modo que se aproxime a P_0 ¡ sorpresa! la recta secante formada por P y P_0 tenderá a la recta tangente en P_0, esto significa que la pendiente de la recta secante tiende a la pendiente de la recta tangente cuando $t \to t_0$ (t tiende a t_0). (ver figura 5).

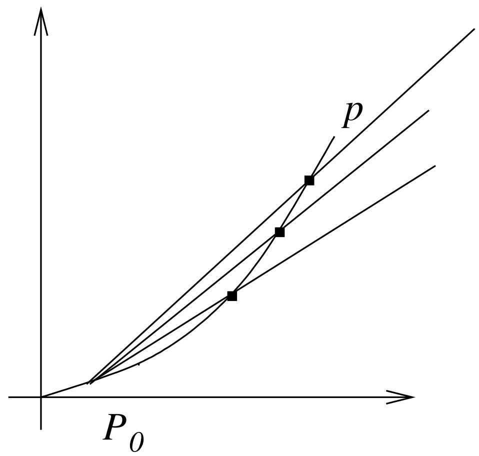

Figura 5:

Al proceso de encontrar la pendiente de la recta tangente de la gráfica de una función en un instante dado lo llamamos derivar.

Aquí describiremos con más detalle todo lo anterior.

La pendiente de la recta (ver figura 6)secante está dada por:

$$\tan\varphi = m_{\text{sec}} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{cat.op}{cat.ad}$$

Según lo anterior, el límite de la pendiente de la recta secante es la pendiente de la recta tangente cuando $t \to t_0$. Todo lo anterior se escribe de la siguiente manera:

$$\lim_{t\to t_0} m_{\text{sec}} = \lim_{t\to t_0}\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{dx}{dt}(t_0) = m_{\tan}$$

A $\frac{dx}{dt}(t_0)$ la llamamos la derivada de x con respecto a t en t_0.

En virtud de lo arriba señalado, la derivada no solamente mide la pendiente de la recta tangente, si la función $x(t)$ representa el desplazamiento de una partícula, la derivada en el instante $t = t_0$ determina la velocidad instantánea cuando $t = t_0$.

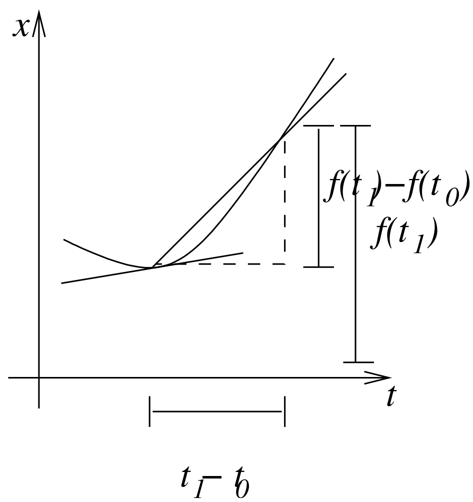

Figura 6:

Como ejemplo, determinaremos la velocidad de la partícula que sigue la función de desplazamiento $x\left(t\right)=5t^{2}$

$\frac{dx}{dt}\left(t_{0}\right)=\lim\limits_{t\rightarrow t_{0}}\frac{x(t)-x(t_{0})}{t-t_{0}}=\lim\limits_{t\rightarrow t_{0}}\frac{5t^{2}-5t_{0}^{2}}{t-t_{0}}=\lim\limits_{t\rightarrow t_{0}}\frac{5(t^{2}-t_{0}^{2})}{t-t_{0}}=5\lim\limits_{t\rightarrow t_{0}}\frac{(t^{2}-t_{0}^{2})}{t-t_{0}}=5\lim\limits_{t\rightarrow t_{0}}\frac{(t-t_{0})(t+t_{0})}{(t-t_{0})}=5\lim\limits_{t\rightarrow t_{0}}t+t_{0}=5\left(t_{0}+t_{0}\right)=$

$5\left(2t_{0}\right)=10t_{0}$ Ahora si $t_{0}=1$ $\frac{dx}{dt}\left(1\right)=10\left(1\right)=10$. Esto significa que la partícula lleva una velocidad de 10 metros sobre segundo después de 1 segundo de movimiento.

Repasemos lo que hemos hecho:

1. Hemos partido de problemas concretos, planteando el problema de encontrar la velocidad de una partícula que se encuentra en movimiento.

2. Este problema físico lo replanteamos de tal modo que se convierte en un problema geométrico, pasamos de un problema concreto a un problema abstracto (recordemos que comenzamos abstrayéndonos cuando planteamos que los ejes del sistema cartesiano representan el espacio y el tiempo, el desplazamiento como la gráfica en tal sistema y cuando sacamos como conclusión que la velocidad instantánea es la pendiente de la recta tangente).

3. Resolvimos el problema de encontrar la pendiente de la recta tangente a un punto de la gráfica de una función, y en consecuencia, quedó resuelto el problema de encontrar la velocidad instantánea de una partícula que sigue cierta ley.

4. Partimos de lo concreto haciendo una pregunta, después, para simplificar el problema nos abstrajimos, porque de este modo, es más fácil resolver el problema. Una vez resuelto el problema nos regresamos a lo concreto pero ahora con la respuesta del problema inicial. Nótese la negación de la negación en este proceso, además de la unión dialéctica entre lo concreto y lo abstracto. Pero esto sucede en general con todas las matemáticas.

5. Todo el proceso antes mostrado niega totalmente lo que los idealistas piensan de las matemáticas. Las matemáticas tienen su origen en lo concreto, incluso, esto ocurre, con las ramas de las matemáticas más abstractas. Hay muchos matemáticos que niegan la veracidad de este proceso de construcción. Esto se debe a su ignorancia en las demás ciencias naturales, al no conocerlas, ellos se forman la idea de que las matemáticas forman partido aparte de las demás ciencias, esto los encierra en su mundito apartado y se vuelven cerrados en el terreno científico.

6. Este mismo sector de matemáticos suele abogar por el "formalismo matemático". Esta idea la manejan mucho ellos para respaldar su filosofía idealista. De hecho, este "formalismo matemático" es la punta de lanza del idealismo en las matemáticas. Para hacerlo pasar como algo natural y correcto, este grupo de personas buscan confundir a sus interlocutores, diciendo que el "formalismo matemático" es escribir puntualmente los resultados y problemas matemáticos, hecho completamente falso. Plantear bien los problemas te lleva a conclusiones materialistas, de hecho los "matemáticos formales" para llegar a una conclusión, plantean mal el problema y en consecuencia ellos no llegan a resultados correctos. Si no se plantea correctamente un problema, la respuesta de éste no será correcta y esto es lo que ocurre con este sector de matemáticos. Más aún, para validar su modo de pensar, ellos dicen estar respaldados en las matemáticas, pero al plantearlas mal, llegan a sacar conclusiones erróneas, porque las matemáticas son solamente una herramienta, no una "tabla de los diez mandamientos bajadas del Sinaí"; del mismo modo que hay que aprender a usar el desarmador, se debe aprender a interpretar y plantear problemas.

Si observamos los escritos originales, los cuales suelen ser de siglos anteriores, notaremos que la deducción de formulas y teoremas con sus respectivas demostraciones no son completas ni puntuales, esto no se debe a que fuesen matemáticos mediocres los creadores de tales escritos; esto se debe a que en aquel entonces no existían las matemáticas necesarias para escribir las ideas completas, sin embargo, sí eran las suficientes para plantearlas correctamente. Esos trabajos fueron escritos puntualmente, una vez que hubo un mayor desarrollo en las matemáticas, para lo cual tuvieron que pasar muchos años.

Es decir, existía un resultado correcto, pero que estaba incompleto; a pesar de ello se estaban creando las condiciones para escribirlo completo. Esta contradicción se mantiene durante varios años hasta llegar a un momento en que ya están todas las condiciones dadas alguien retoma el problema y lo rescribe puntualmente. Esta es la historia de las matemáticas, una historia llena de contradicciones, discontinuidades, una historia no lineal, contrario a la que piensan los “matemáticos formales”, ellos se imaginan la historia de las matemáticas lineal en el sentido de que, para ellos, la historia de las matemáticas ha transcurrido como un libro de texto, con la estructura de teorema-demostración-ejemplo, teorema-demostración-ejemplo,...

Este proceso histórico no solamente se da en las matemáticas, se da en cualquier otra disciplina científica, ésta es la teoría marxista del conocimiento, la cual postula que el conocimiento científico se da a través de revoluciones, es decir, hay periodos de “ciencia normal”, en los cuales se dan pequeños descubrimientos e invenciones que no trascienden demasiado, pero estos se acumulan y forman la base para resolver un gran problema abierto; cada gran problema abierto queda resuelto una vez que todos estos “pequeños descubrimientos” son los suficientes para resolverlo. Una vez resuelto este problema se genera una gran revolución en la ciencia, en la cual se dan grandes descubrimientos a partir de la solución de ese gran problema,este periodo revolucionario dura muy poco comparado con el periodo de “ciencia normal”. Al terminar el periodo revolucionario regresamos al periodo de “ciencia normal” pero a un nivel generalizado. Ya que en este nuevo periodo de “pequeños descubrimientos” se conoce mucho más que antes del periodo revolucionario. (Noten la negación de la negación).

Esto es lo que sucedió con el cálculo, es por ello que el autor considera importante haber mencionado todo lo anterior, porque el cálculo no solamente fue el punto de arranque de las matemáticas modernas, también fue el punto de arranque de las demás ciencias naturales, porque las matemáticas no forman partido aparte de las demás ciencias.

Por todo lo anterior creo que el nacimiento del cálculo es la máxima revolución científica que se haya dado y es por ello que decidí que esta monografía debía tratar sobre esta disciplina.

Las ciencias matemáticas no solamente no forman partido aparte de otras ciencias, no forman partido aparte del desarrollo de las fuerzas productivas, más aun, el desarrollo de las fuerzas productivas es motor del desarrollo científico, no es casualidad que el cálculo haya nacido en Inglaterra en los mismos años que la burguesía derrotaba el régimen feudal en ese país. Es por ello que hay más científicos en los países más avanzados que en los de tercer mundo, y los pocos que hay en estos países suelen emigrar a países más avanzados porque en sus paises no hay condiciones para desarrollarse.

Pero también es cierto que la ciencia está restringida al mismo desarrollo de las fuerzas productivas. Por ejemplo, en un país pobre no hay muchos científicos ni presupuesto para llevar a cabo experimentos costosos, experimentos que sirven para desarrollar las fuerzas productivas, por tanto hay una pobre creación de nuevos conocimientos y no puede haber un gran desarrollo en las fuerzas productivas.

Las ideas dominantes en un momento dado son las ideas de la clase dominante en ese mismo momento. En los últimos años hemos visto como ha caído el sistema capitalista, y con él, se degeneran sus propias ideas, prueba de ello, es la teoría del Big Bang: una mediocre teoría que pretende explicar "el origen del universo" (léase Razón y Revolución). Toda teoría que pretenda explicar el origen del universo está condenada al fracaso, porque el universo es infinito en espacio y tiempo, sin embargo esta "teoría" ha servido a toda la reacción para mantener vigentes todas las religiones y mantener calmadas a las masas.

Vale la pena añadir que como consecuencia de la contradicción señalada arriba, cada vez hay menos científicos verdaderamente calificados, por tanto, el desarrollo tecnologico se empobrece y en concecuencia el desarrollo de los instrumentos de producción es minado. Por otro lado, "¡la burguesía no puede existir, sino a condición de revolucionar incesantemente los instrumentos de producción y, por consiguiente las relaciones de producción, y con ello todas las relaciones sociales!". Ésta es otra contradicción del capitalismo.

Inspirados en la ley de movimiento $x(t) = 5t^2$, estudiemos el comportamiento de las gráficas de la familia de funciones $f_n(t) = t^n$, a este tipo de familia de funciones se le llama sucesión de funciones. A continuación, mostraremos la dialéctica de la sucesión de funciones.

Sea $g(t) = t^n$. Para tal función, t es una variable y n es una constante. En matemáticas decimos que una letra es una variable si ésta puede asumir valores diferentes, es decir, cambiar de valor; mientras que una constante, sólo puede tener un valor fijo. Para la sucesión de funciones las constantes y las variables se convierten en sus contrarios, es decir, las variables se convierten constantes y las constantes se vuelven variables. Sea $f_n(t) = t^n$ la sucesión de funciones que analizaremos. Aquí t es constante y n es una variable que toma valores enteros positivos. De este modo, al variar n, obtenemos una familia de funciones que se obtienen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= t \\ f_2(t) &= t^2 \\ f_3(t) &= t^3 \end{aligned}$$

Así sucesivamente se obtienen todas las funciones de esta sucesión de funciones.

Primero tomemos los puntos del eje t que se encuentran entre el 0 y el 1, es decir los puntos en el intervalo $[0, 1)$. Para estos puntos debemos notar que las gráficas de las funciones $f_n(t) = t^n$ con $n \geq 1$ se encuentran en orden decreciente, en el sentido de que si $m > n > 1$, entonces la gráfica de $t^m < t^n$, esto significa que la gráfica de t^m está abajo de t^n, por ejemplo, sabemos que $1 < 2 < 3$, por lo tanto, $t^3 < t^2 < t$, esto significa que la gráfica de $f_1(t) = t$ está por arriba de la gráfica de $f_2(t) = t^2$ y ésta, a su vez está por arriba de $f_3(t) = t^3$ y asi sucesivamente para todos los enteros positivos en el intervalo $[0, 1)$ (ver figura 7). Para $t = 1$ $f_n(1) = 1^n = 1$ por lo tanto todas las gráficas de esta sucesión de funciones pasan por el 1 cuando $t = 1$. Para $t > 1$ las gráficas se convierten en sus contrarios, ahora las gráficas se encuentran ordenadas de manera creciente. Si $m > n > 1$ entonces $t^m > t^n$ en particular para $1 < 2 < 3$ tenemos que $t^3 > t^2 > t$. (figura 7)

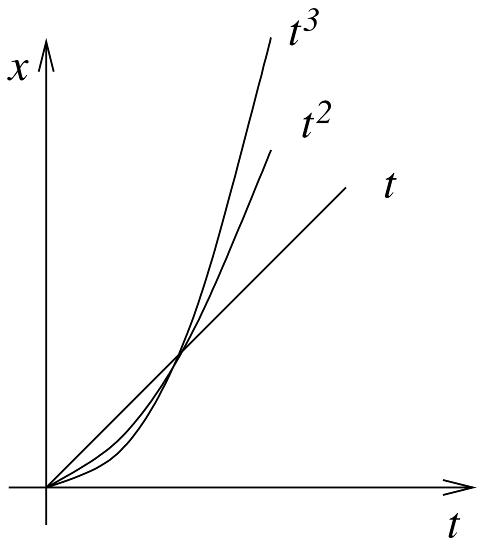

Figura 7:

Como conclusión, haremos énfasis en la dialéctica del actual sucesión de funciones. Si empezamos a caminar en $t = 0$, de izquierda a derecha, encontramos que las gráficas se encuentran ordenadas de modo decreciente, es decir $t^3 < t^2 < t$ hasta que la cantidad se vuelve calidad y llegamos a $t = 1$ donde todas las gráficas pasan por el mismo punto. Para $t > 1$ las gráficas se convierten en sus contrarios, porque se invierten los ordenes ahora se encuentran ordenadas de modo creciente $t^3 > t^2 > t$.

Este conjunto de funciones $f_n(t) = t^n$ poseen otra propiedad: su suavidad.

La derivada de una función en un punto es un número (es el valor de la pendiente de la recta tangente). Pero la derivada sobre todo un conjunto de puntos en el eje t se convierte dialécticamente en una función. De este modo, la derivada no solamente mide pendientes, globalmente mide la suavidad de una función. Abajo explicare esta idea.

Por suavidad entenderemos que una función no deja picos. Por ejemplo, la gráfica de la función valor absoluto definida del siguiente modo:

$$f(t) = |t| = \{ {}^{t \text{ si } t \geq 0}_{-t \text{ si } t<0}$$

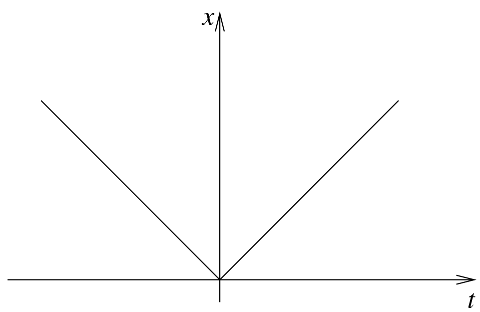

Figura 8:

tiene un pico en $t = 0$, por lo tanto esta gráfica no es suave. Pero, ¿qué tiene que ver este pico con la derivabilidad de la función?, solamente lo siguiente: ¡la derivada no existe en los puntos donde hay picos!, pero a la vez, ¡hay dos rectas tangentes, una "a la derecha" y otra "a la izquierda"!, más adelante explicaré esta contradicción dialéctica (ver figura 9). La derivada tampoco existe en los puntos donde hay discontinuidad en la función. Entenderemos por discontinuidad de la función en un punto a la ruptura de la gráfica de la función en ese punto, por ejemplo en la gráfica de la siguiente función que llamaremos función signo de t (ver figura 9):

$$\operatorname{sgn}(t) = \{ {}^{1 \text{ si } t \geq 0}_{-1 \text{ si } t<0}$$

Nosotros entenderemos por la no existencia de la derivada en un punto $t = t_0$ de una función $x(t)$, una discontinuidad de la función derivada $\frac{dx}{dt}(t)$ en el punto $t = t_0$. Para ilustrar lo anterior, calcularemos lo que sería "la derivada" de $|t|$ en $t = 0$.

Si $t > 0$ entonces $f(t) = |t| = t$ en virtud a la definición del valor absoluto:

$\frac{df}{dt}(0) = \underset{t \to 0}{lím} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \underset{t \to 0}{lím} \frac{|t|-|0|}{t-0} = \underset{t \to 0}{lím} \frac{|t|}{t} = \underset{t \to 0}{lím} \frac{t}{t} = \underset{t \to 0}{lím} 1 = 1$

Por otro lado si $t < 0$, entonces $f(t) = |t| = -t$

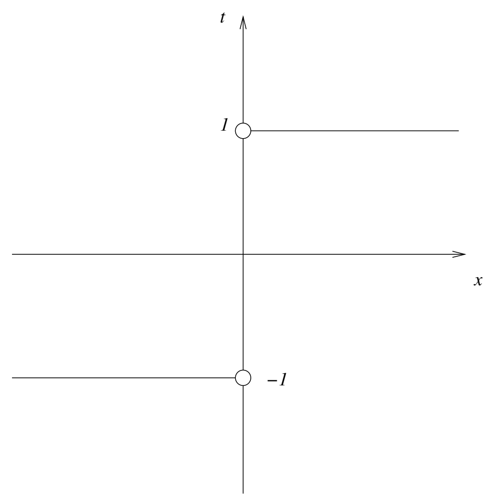

Figura 9:

$\frac{df}{dt}(0) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{|t|-|0|}{t-0} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{|t|}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{-t}{t} = \lim\limits_{t \to 0} -1 = -1$

Esto significa que la gráfica de $f(t) = |t|$ tiene dos rectas tangentes, lo que quiere decir que la "derivada" de f, no está definida de forma única, es decir, la función derivada $\frac{df}{dt}(t)$ no está definida para $t = 0$, por lo tanto la función no es derivable en $t = 0$. Más aun, la gráfica de la derivada de $\frac{df}{dt}(t)$ es como en la figura 7 (noten que en $t = 0$ no existe la gráfica). Así, queda explicada la contradicción dialéctica.

Ahora definiremos las derivadas de orden superior, es decir, la derivada de segundo orden, de tercero y así sucesivamente. La derivada de segundo orden será la derivada de la derivada de la función, la de tercer orden la derivada de la derivada de la derivada de la función. Escribamos esto:

La derivada de segundo orden:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}(t)\right)$$

La derivada de tercer orden:

$$\frac{d^3 f(t)}{dt^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}(t)\right)\right)$$

En general, La derivada de n-ésimo orden de una función es

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}}\right)$$

No todas las funciones tienen todas las derivadas de n-ésimo orden por ejemplo, la función $f(t) = |t|$, en $t = 0$, sólo es continua y no es derivable, así como éstas, hay funciones que pueden tener la primera derivada, pero no necesariamente tienen segunda derivada, es decir pueden tener derivada de orden $n-1$, pero no necesariamente deben tener derivada de orden n, a pesar de esto, puede haber funciones que tengan derivada de todos los ordenes. De este modo, definiremos los siguientes conjuntos de funciones (para efectos divulgatorios de esta monografía, diremos que las funciones continuas son las funciones cuya gráfica no se rompe):

$$C = \left\{ \begin{array}{c} \text{El conjunto de las} \\ \text{funciones continuas} \end{array} \right\}$$

$$C^1 = \left\{ \begin{array}{c} \text{El conjunto de las funciones} \\ \text{con primera derivada continua} \end{array} \right\}$$

$$C^2 = \left\{ \begin{array}{c} \text{El conjunto de las funciones} \\ \text{con segunda derivada continua} \end{array} \right\}$$

En general de este modo podemos definir C^n

$$C^n = \left\{ \begin{array}{c} \text{El conjunto de las funciones} \\ \text{con } n\text{-ésima derivada continua} \end{array} \right\}$$

las funciones que tienen derivada de todos los ordenes se encuentran en el conjunto

$$C^\infty = \left\{ \begin{array}{c} \text{El conjunto de las funciones} \\ \text{con derivada de todo orden} \end{array} \right\}$$

Para entender todo lo anterior calcularemos la derivada de $f(t) = t^m$

El primer caso es para $m = 0$, para la cual, tenemos la función $f(t) = t^0 = 1$

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{1-1}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} 0 = 0$$

El segundo caso es para $m = 1$, en éste, tenemos la función $f(t) = t^1 = t$

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{t - t_0}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} 1 = 1$$

En el tercer caso, que es $m = 2$, obtenemos la función $f(t) = t^2$

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{t^2-t_0^2}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{(t-t_0)(t+t_0)}{(t-t_0)} = \lim_{t\to t_0} t+t_0 = t_0+t_0 = 2t_0^1 = 2t_0$$

El cuarto caso: $m = 3$, define la función $f(t) = t^3$

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{t^3-t_0^3}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{(t-t_0)(t^2+tt_0+t_0^2)}{(t-t_0)} = \lim_{t\to t_0} t^2+tt_0+t_0^2 = t_0^2+t_0^2+t_0^2 = 3t_0^2$$

En general, si $f(t) = t^m$

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \frac{dt^m}{dt} = mt^{m-1}$$

Como ejemplo, calcularemos las derivadas de orden superior de la función $x(t) = 5t^2$

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{d5t^2}{dt} = 5\frac{dt^2}{dt} = 5(2t) = 10t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = \frac{d10t}{dt} = 10\frac{dt}{dt} = 10(1) = 10$$

$$\frac{d^3x}{dt^3}(t) = \frac{d10}{dt} = 10\frac{d1}{dt} = 10(0) = 0$$

$$\frac{d^4x}{dt^4}(t) = 0, \frac{d^5x}{dt^5}(t) = 0, ..., \frac{d^nx}{dt^n}(t) = 0$$

Como para $x(t)$ existen las derivadas de todos los ordenes (recuerden que el cero representa una cantidad y no expresa necesariamente una inexistencia) por ello podemos decir $x(t)$ es una función que está dentro del conjunto C^∞. Esto no solamente ocurre para $x(t) = 5t^2$, ocurre para cualquier función de la forma $f(t) = t^m$, es decir, la anterior función también es elemento del conjunto C^∞.

Pero ¿qué importancia tiene que una función forme parte del conjunto C^∞? Ya explicamos arriba que si una función derivable es suave, es decir, no deja picos. Ahora, que una función posee todas sus derivadas, significará que esta función es ultra suave.

Aquí mostraremos la dialéctica de estas funciones en el siguiente sentido: ¡a partir de funciones ultra suaves, podemos obtener funciones *discontinuas*!

Consideremos nuevamente la sucesión de funciones $f_n(t) = t^n$, y tomemos t de tal modo que $0 \leq t \leq 1$, ahora, hagamos variar a n de tal modo que n se vuelva tan grande como se quiera. Para cada número natural n, obtendremos una distinta función cuya gráfica se pega al eje t, de tal modo que, mientras más grande sea el número n, más próximo se encontrara la gráfica al eje t; para $t = 1$, todas las gráficas de las funciones pasan por el punto $(1, 1)$ (ver figura 10). De modo que la función límite es la función:

$$g(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } & 0 \leq t \prec 1 \\ 1 \text{ si } & t = 1 \end{cases}$$

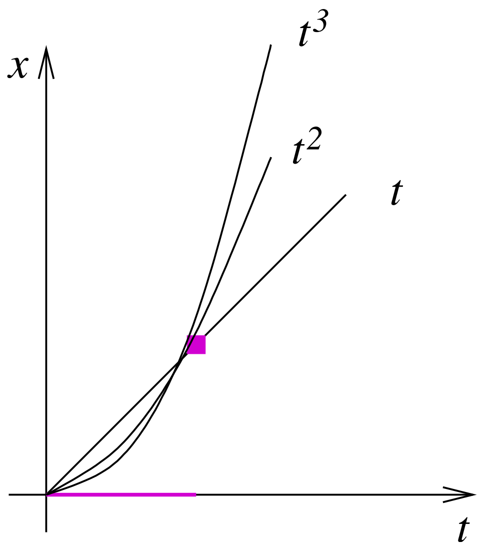

Figura 10:

Esta función es una función discontinua y además, $f_n(t) \to g(t)$ cuando $n \to \infty$. De esta manera, se ha producido a partir de funciones ultra suaves una función discontinua. En lenguaje de la dialéctica, la cantidad se vuelve calidad.

LA DIFERENCIAL

Es claro para nuestra intuición que no podemos comparar una línea recta con una línea curva, pero esto es incorrecto, ya que entre ambas lineas hay una unión dialectica de contrarios que queda bien explicada por la diferencial.

Diremos que una curva es diferenciable en un punto P, cuando se puede aproximar localmente esta curva con una recta que pasa por P, a la recta la llamamos tangente a la curva en el punto P.(ver figura). Por localmente entendemos cercanía, es decir, la aproximación sólo es válida para puntos cercanos al punto P. Se puede demostrar que las curvas que son la gráfica de una función derivable, son diferenciables. Es por ello que a las curvas diferenciables en ocaciones les llamemos curvas suaves.

Nótese en primer lugar que la curva y la recta son contrarios, ya que una tiene curvatura distinta de cero y la otra tiene curvatura cero, pero a pesar de ello, se encuentran unidas. Esto se entiende mejor con la ayuda de la diferencial.

En un punto, la curva puede ser aproximada localmente por medio de una recta tangente. Pero globalmente, esta recta es muy distinta a la curva. Si ahora tomamos dos puntos distintos, la aproximación habrá mejorado, ya que esta unión de rectas se parece más a la curva original. De modo que mientras más rectas tangentes tomemos en distintos puntos, la unión de éstas se parecerán más a la curva. Cuando el número de rectas se vuelve infinito—es decir, cuando la cantidad se vuelve calidad—,la curva será exactamente la unión de estas rectas, más aun, localmente la recta tangente y un pequeño pedazo de curva son lo mismo (ver figura 5).

"El contenido mental de los dos pasos citados puede resumirse en la proposición que contradicción = contrasentido y, por tanto, no puede presentarse en el mundo real. Esta proposición puede tener para gente de entendimiento normalmente sano la misma validez evidente que pueda tener la proposición de que lo recto no puede ser curvo ni lo curvo recto. Pero el cálculo diferencial, a pesar de todas las protestas del sano entendimiento, pone en ciertas circunstancias la igualdad de lo recto y lo curvo, y consigue con ello éxitos que no consigue jamás el sano entendimiento aferrado a lo absurdo de la identidad de lo recto y lo curvo".

Federico Engels, *Anti-Dürhing*

Otro hecho dialéctico que hay que destacar de la diferencial es que "el todo es mayor que la suma de sus partes". Una recta aislada jamás podría ser comparada con la curva, ni siquiera la infinidad de rectas forman la curva. La curva queda formada por la unión de ellas, pero esta unión no es una unión artificial, es una unión de pequeñas rectas que también son pequeñas curvas, cosa que solo puede suceder para las curvas diferenciales.

LA INTEGRAL

En el numeral pasado, hemos definido la derivada de una función, en este definiremos el contrario de la derivada: la integral.

Esta operación nace como consecuencia de responder la siguiente pregunta: si se conoce la velocidad de una partícula para un tiempo determinado ¿ podemos conocer la ley de movimiento de tal partícula?

La respuesta no es fácil de contestar, esta respuesta nos lleva a crear una nueva disciplina que en apariencia no tiene nada que ver con la derivada, esta disciplina es el cálculo integral. De hecho, el cálculo diferencial y el cálculo integral fueron considerados distintos hasta que surgió un teorema que además de unir estas disciplinas las exhibe como contrarias, tal teorema es el teorema fundamental del cálculo; de este teorema hablaremos con más detalle posteriormente. En este momento, nos propondremos construir la integral de una función.

Supongamos que $v(t)$ es la función velocidad de una partícula. Esta función nos da la velocidad de una partícula en movimiento para cada instante t. Por ejemplo, consideremos la función $v(t) = 10t$. Si deseamos conocer la velocidad de una partícula en un instante $t = 2s$, lo único que debemos hacer es cambiar la t por el 2. Es decir $v(t = 2) = v(2) = 10(2) = 20$. Esto significa que en el segundo $t = 2s$, la partícula en movimiento llevará una velocidad de $20m/s$. La gráfica de esta función es una línea recta (ver figura 11). Noten que ahora representamos al eje de las velocidades "eje v", como un eje perpendicular al eje del tiempo t.

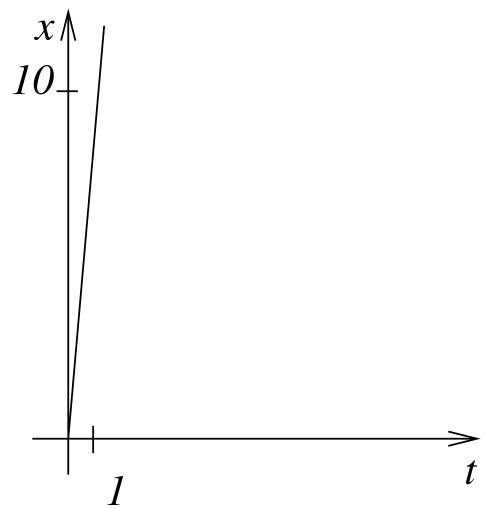

Figura 11:

Si la velocidad de una partícula es constante—digamos que tiene un valor v_0—el desplazamiento de esta partícula está dado por $x(t) = v_0 t$. Para este caso, la función velocidad está dada por $v(t) = v_0$ cuya gráfica se muestra en la figura 12. Esta gráfica es una recta paralela al eje t a una altura v_0 de este eje. Los movimientos que tienen como función velocidad $v(t) = v_0$ se llaman movimientos rectilíneos uniformes.

Pero geométricamente (abstracto), ¿qué representa el desplazamiento en la gráfica de la función velocidad $v(t) = v_0$? Tomemos el intervalo de tiempo desde $t = 0$, que

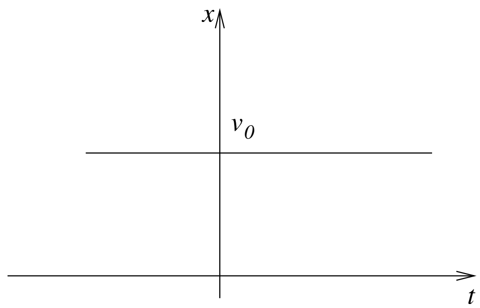

Figura 12:

representa el instante en el que inició el movimiento hasta el tiempo $t = t_0$, para esta función de velocidad, el desplazamiento de la partícula en este instante es $x(t_0) = v_0 t_0$, esto es el área comprendida entre el eje t y la línea v_0. Lo que ocurre así porque tenemos un rectángulo con base de longitud t_0 y altura igual a v_0 y el área de los rectángulos se obtiene multiplicando la base por la altura (véase figura 13).

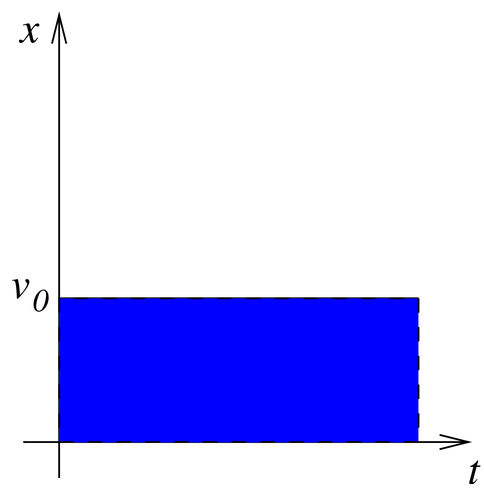

Figura 13:

Debe notarse que nuevamente hemos planteado un problema concreto en uno geométrico—es decir en un problema abstracto—el cual resolveremos y lo interpretaremos concretamente.

¿Cómo resolvemos este mismo problema para una función arbitraria $v(t)$? Por lo anterior podemos deducir que el área bajo la gráfica sobre el eje t determina el desplazamiento (ver figura 14).

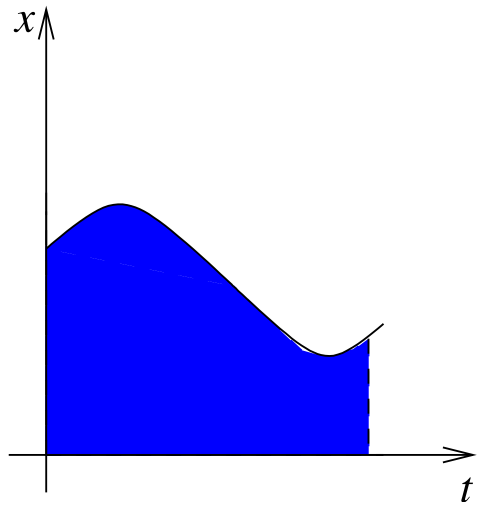

Figura 14:

Ahora el problema original se ha convertido en el siguiente problema: Dada la gráfica de la función $v\,(t)$, encontrar el área encerrada entre su gráfica y el eje t en el intervalo de tiempo desde $t = 0$ hasta $t = t_0$.

Para resolver este problema utilizaremos el siguiente método.

1. Hagamos una partición del intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = t_0$(ver figura 15).

2. Formemos rectángulos cuyas bases sean las particiones del intervalo y alturas correspondientes a la altura mínima de la gráfica en la partición del intervalo. (ver figura 16).

La suma de las áreas de todos estos rectángulos es aproximadamente el área total bajo la gráfica de la curva.

Para fijar ideas usaremos una partición con cinco elementos $\{0, t_1, t_2, t_3, t_4\}$. La base del rectángulo uno está dada por la longitud entre el 0 y el punto t_1, por lo tanto, la base del primer rectángulo es $(t_1 - 0)$, de manera análoga, sabemos que la longitud de la base del segundo rectángulo es $(t_2 - t_1)$, de este modo las longitudes de las bases del tercer y cuarto rectángulo son $(t_3 - t_2)$ y $(t_4 - t_3)$ respectivamente.

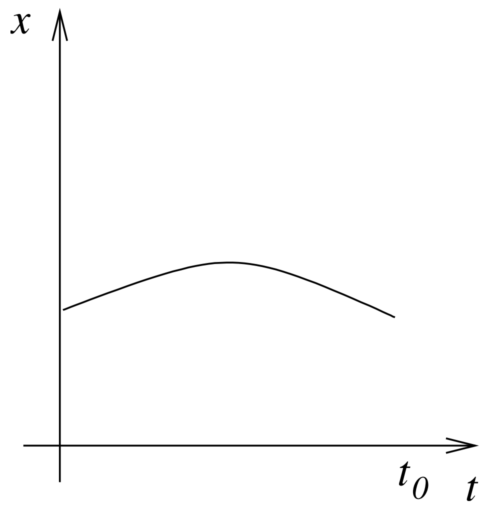

Figura 15:

Aquí podemos ver otra ley de la dialéctica, un elemento de la partición forma el primer punto de un rectángulo, pero se convierte en su contrario en el rectángulo del otro lado, ya que en éste, es el último punto de la base. Para encontrar la altura de tales rectángulos, tenemos que tomar un punto ξ en el interior de la base, de tal modo que la altura que corresponde a ese punto, sea menor que la altura de cualquier otro punto de la base de tal rectángulo. En nuestro caso, los puntos ξ, corresponden con los mismos puntos de la partición, o sea, $\xi_1 = t_1, \xi_2 = t_2, \xi_3 = t_3, \xi_4 = t_4$. Entonces la altura del primer rectángulo es $v(t_1)$, la del rectángulo dos es $v(t_2)$, la del rectángulo tres $v(t_3)$ y el del cuatro $v(t_4)$. Por lo tanto, el área del primer rectángulo es $v(t_1)(t_1 - 0)$, el área del segundo rectángulo es $v(t_2)(t_2 - t_1)$ y la de los rectángulos tres y cuatro son $v(t_3)(t_3 - t_2)$ y $v(t_4)(t_4 - t_3)$, respectivamente. Por lo tanto, la suma de las áreas de los cuatro rectángulos es $S = v(t_1)(t_1 - 0) + v(t_2)(t_2 - t_1) + v(t_3)(t_3 - t_2) + v(t_4)(t_4 - t_3)$. Denotaremos las bases de la siguiente manera: $\Delta t_1 = (t_1 - 0)$, $\Delta t_2 = (t_2 - t_1)$, $\Delta t_3 = (t_3 - t_2)$, $\Delta t_4 = (t_4 - t_3)$.De este modo obtendremos que $S = v(t_1)\Delta t_1 + v(t_2)\Delta t_2 + v(t_3)\Delta t_3 + v(t_4)\Delta t_4$. Esta suma de áreas de ractángulos la denotaremos del siguiente modo $\sum_{i=1}^{4} v(t_i)\Delta t_i = S$. El símbolo Σ es una letra del alfabeto griego que se llama sigma, en matemáticas la usamos para indicar una suma, la parte de abajo de sigma nos indica desde qué numero se empieza a sumar y la parte de arriba hasta qué número debemos sumar. Es decir: $S = \sum_{i=1}^{4} v(t_i)\Delta t_i = v(t_1)\Delta t_1 + v(t_2)\Delta t_2 + v(t_3)\Delta t_3 + v(t_4)\Delta t_4$ (ver

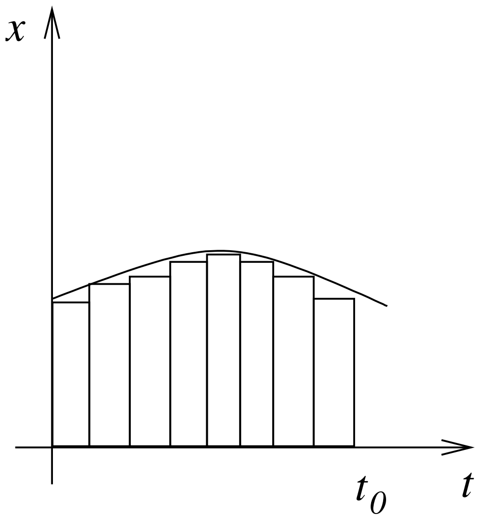

Figura 16:

figura 16).

Notemos lo siguiente: Mientras más grande sea el numero de rectángulos con los que nos aproximamos al área, más parecida es el área de esta aproximación al área bajo la curva. (ver figura 16). De este modo, podemos escribir una aproximación más general al área bajo la curva. Sea n el numero de rectángulos inscritos. En tal caso, el área bajo la curva será aproximadamente igual a la suma de las áreas de los rectángulos $S_n = \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\,\Delta t_i = v(t_1)\,\Delta t_1 + v(t_2)\,\Delta t_2 + ... + v(t_n)\,\Delta t_n$.

De todo lo anterior, podemos inferir que el área bajo la curva será la suma de las áreas de los ractángulos cuando hay una cantidad tan grande de todos estos, de tal modo que contiene tantos rectángulos como numeros enteros positivos, es decir una cantidad infinita de rectángulos, que denotaremos como:

$$A = \mathit{lím}_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\,\Delta t_i = v(t_1)\,\Delta t_1 + v(t_2)\,\Delta t_2 + \dots$$

En este contexto, el símbolo $\mathit{lím}_{n\to\infty}$ significa que el número de rectángulos crece tanto hasta volverse una cantidad infinita y a esta cantidad la denotaremos como:

$$\int_{0}^{t_0} v\left(t\right)dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} v\left(t_i\right)\Delta t_i$$

Y se llama la integral de $v\left(t\right)$.

La dialéctica de la construcción de la integral es la siguiente—¡obtuvimos el área bajo la gráfica de una función, es decir el área de un continuo a través del área de funciones discontinuas! (ver figura 17)—: El área bajo $l_i\left(t\right)$ es una función discontinua, cuya gráfica representa las tapas de los rectángulos, ésta es una aproximación al área bajo la curva y cuando la cantidad de tapas de los rectángulos se hace infinita, el área bajo estas tapas es igual al área bajo la curva $v\left(t\right)$ continua. Lo que hemos dicho es que si tenemos una función de velocidad continua, entonces podemos considerar ésta como la *unión de una infinidad de movimientos rectilíneos uniformes*, es decir, que un pequeño pedazo de la gráfica de la función velocidad, es lo mismo que un movimiento rectilíneo uniforme; notemos que en este problema hemos hecho que una pequeña línea curveada sea igual que una pequeña recta. En general, un movimiento rectilíneo uniforme (MRU) no es igual a un movimiento rectilíneo con una función velocidad $v\left(t\right)$. Sin embargo, este hecho se da, debido a la unión infinita de MRU, de este modo, en la integral encontramos la ley dialéctica que nos dice que el todo es mayor que la suma separada de sus partes.

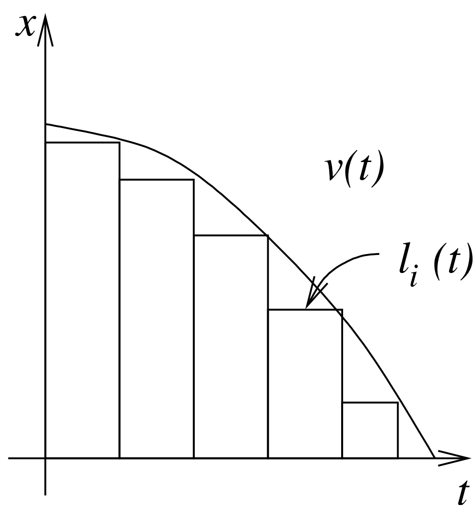

Figura 17:

A manera de conclusión, diremos que la integral de la función de velocidad de una partícula determina el desplazamiento de dicha partícula, es decir:

$$x(t) = \int_a^t v(\tau)\, d\tau$$

donde $x(t)$ representa el desplazamiento de la partícula y $v(\tau)$ representa la función velocidad. A su vez podemos decir que esta integral representa geométricamente el área bajo la gráfica de la función $v(\tau)$ en el intervalo de tiempo de a a t.

Revisemos de nuevo las preguntas que dieron origen al cálculo diferencial (*CD*) y al cálculo integral (*CI*). El *CD* surgió de la siguiente pregunta: dada la función desplazamiento ¿cuál es la función velocidad? mientras que el *CI* surge de responder: dada la función velocidad ¿cuál es la función desplazamiento? Estas preguntas son contrarias, de este modo es de esperar que las respuestas de tales preguntas—la derivada y la integral—sean contrarias. Esto es así, siempre y cuando las funciones de desplazamiento y velocidad satisfagan ciertas condiciones que no discutiremos, ya que éstas rebasan los propositos de esta monografía. Pero ello no nos impedira enunciar el siguiente resultado. El nombre de este resultado es el *teorema fundamental del cálculo (TFC)*, el cual se enuncia en dos partes:

Primera parte:

$$\int_a^t \frac{dx}{dt}(\tau)\, d\tau = x(t) - x(a)$$

Segunda parte:

$$\frac{d}{dt} \int_a^t x(\tau)\, d\tau = x(t)$$

De este manera queda claro que entre el *CD* y el *CI* existe una unión dialéctica de contrarios.

Como ejemplo del uso del teorema fundamental del cálculo, utilizaremos la función $x(t) = t^2$. Primero derivaremos tal función $\frac{dt^2}{dt} = 2t$. Ahora calculemos la integral de $2t$. En virtud al *TFC*, encontramos que:

$$\int 2t dt = t^2$$

como segundo ejemplo, mostraremos la función $x(t) = t^2 + 7$, la derivada de esta función es $\frac{d\left(t^2+7\right)}{dt} = 2t$, porque $\frac{d(7)}{dt} = 0$. De este modo la integral de esta función debe de ser:

$$\int 2tdt = t^2 + 7$$

En general, si $x(t) = t^2 + c$, entonces $\frac{dx}{dt}(t) = \frac{d\left(t^2+c\right)}{dt} = 2t$, integrando tal expresión, tenemos:

$$\int 2tdt = t^2 + c$$

La constante arbitraria c se llama constante de integración y es una cantidad independiente de la variable de integración. Puesto que c puede tener cualquier valor, significa que si una función diferencial tiene una integral, entonces, tuvo una infinidad de integrales, es decir una familia de funciones.

Dicho en el lenguaje de la dialéctica, si $f(t)$ es una función y a ésta la derivamos—la negamos—, obtendremos $\frac{df}{dt}(t)$. Neguemos ahora lo negado. Se niega por segunda ocación, utilizando el contrario de la primera negación—es decir la integral—: $\int \frac{df}{dt}(t)\,dt = f(t) + c$. De este modo se manifiesta la ley dialéctica de la negación de la negación, ya que llegamos al mismo resultado $f(t)$, pero a un nivel generalizado, ya que llegamos a $f(t) + c$, que es una familia de funciones dentro de las cuales se encuentra $f(t)$.

CONCLUSIÓN

En esta pequeña monografía, se ha encontrado demasiada dialéctica en el cálculo diferencial e integral, realmente podemos seguir extendiendo esta monografia ya que todavía hay más dialéctica en el cálculo, pero no seguimos porque de hacerlo, se complicaría la lectura. Espero que el lector haya quedado satisfecho y que sea capaz de sacar más conclusiones.

Por otro lado, espero que haya quedado bien claro que no se necesita llegar a estudiar teorías avanzadas como la del caos y la de catástrofes para sacar conclusiones dialécticas, basta con estudiar perfectamente el cálculo para empezar a sacar conclisiones dialécticas. Pero el lector también debe ser capaz de notar que todas las ramas de las matemáticas que utilizan al cálculo, necesariamente son disciplinas que desobedecen a la lógica formal, y que en cambio, siguen las leyes del materialismo dialéctico.